ZUR AUSWERTUNG GEWISSER NUMERISCHER REIHEN MIT HILFE MODULARER FUNKTIONEN

Peter Kirschenhofer, Helmut Prodinger und Johannes Schoißengeier

Abstract. Using the functional equation for Dedekind's η-function two formulae are achieved which allow to evaluate numerically some constants appearing in the analysis of certain algorithms in Computer Science.

In der Arbeit [3] werden charakteristische Parameter von Algorithmen im Zusammenhang mit Suchbäumen untersucht. Dabei tritt die Konstante

$$C_M = \frac{1}{12} + \frac{\pi^2}{6\log^2 M} - \frac{2}{\log M}\cdot \mu_M$$

mit

$$\mu_M = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k(M^k-1)}$$

auf. Die numerische Auswertung ergibt für C_2 auf 12 Dezimalen genau den Wert 1! Diese Beobachtung wurde zum Anlaß genommen, die Größe μ_M (sowie anschließend eine weitere Konstante) mit Hilfe modularer Funktionen zu analysieren und damit dieses numerische Phänomen zu erklären.

Sei

$$f(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k(e^{kx}-1)} = \log \prod_{n\geq 1} (1+e^{-nx}).$$

Dann haben wir

$$\mu_M = f(\log M).$$

Um zu einer Funktionalgleichung für $f(x)$ zu gelangen, kann man den folgenden Zusammenhang mit der Funktion

$$g(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(e^{2\pi kx}-1)} = -\log \prod_{n\geq 1} (1-e^{-2\pi nx})$$

benützen:

Wegen $\prod_{n\geq 1} (1+q^n) = \prod_{n\geq 0} \frac{1}{1-q^{2n+1}}$

ist

$$f(x) = \log \prod_{n\geq 0} \frac{1}{1-e^{-(2n+1)x}} = g\left(\frac{x}{2\pi}\right) - g\left(\frac{x}{\pi}\right).$$

Nun gilt nach [1;3.2(5)] die folgende Funktionalgleichung, welche zur Funktionalgleichung für die Dedekindsche η-Funktion

$$\eta(x) = e^{\pi i x/12} \cdot \prod_{n\geq 1} (1-e^{2\pi i n x}) \qquad (\operatorname{Im} x>0)$$

äquivalent ist:

$$g\left(\frac{1}{x}\right) - g(x) = \frac{\pi}{12}\left(x - \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2}\log x \text{ für } x>0.$$

Weiters haben wir

$$f(x) = g\left(\frac{x}{2\pi}\right) - g\left(\frac{x}{\pi}\right) - g\left(\frac{2\pi}{x}\right) + g\left(\frac{\pi}{x}\right) - f\left(\frac{2\pi^2}{x}\right),$$

da

$$f\left(\frac{2\pi^2}{x}\right) = g\left(\frac{\pi}{x}\right) - g\left(\frac{2\pi}{x}\right),$$

sodaß

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\pi}{12}\left(\frac{2\pi}{x} - \frac{x}{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\log\frac{2\pi}{x} + \\ &\quad + \frac{\pi}{12}\left(\frac{x}{\pi} - \frac{\pi}{x}\right) + \frac{1}{2}\log\frac{x}{\pi} - f\left(\frac{2\pi^2}{x}\right) \\ &= \frac{\pi^2}{12x} - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{x}{24} - f\left(\frac{2\pi^2}{x}\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\mu_M = \frac{\pi^2}{12\log M} - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\log M}{24} - f\left(\frac{2\pi^2}{\log M}\right),$$

und man sieht unmittelbar, daß (für kleine Werte von M) der Restterm $f(2\pi^2/\log M)$ klein ist.

Im Spezialfall M=2 ergibt sich insbesonders

$$C_2 = 1 - f\left(\frac{2\pi^2}{\log 2}\right).$$

Ebenfalls in [3] tritt die Konstante

$$\nu_M = \sum_{k\geq 1} \frac{M^k}{(M^k-1)^2}$$

auf.

Setzen wir

$$h(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{e^{kx}}{(e^{kx}-1)^2},$$

so ist also $\nu_M = h(\log M)$.
Andererseits sieht man leicht, daß (mit der obigen Funktion $g(x)$)

$$h(x) = -\frac{1}{2\pi}\, g'\left(\frac{x}{2\pi}\right).$$

Differenziert man die Funktionalgleichung für $g(x)$, ergibt sich

$$h(x) = \frac{\pi^2}{6x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{1}{24} - \frac{2\pi^2}{x^2}\, h\left(\frac{4\pi^2}{x}\right)$$

und damit wiederum die Möglichkeit, $\nu_M = h(\log M)$ für kleine Werte von M durch den Wert

$$\frac{\pi^2}{6\log^2 M} - \frac{1}{2\log M} + \frac{1}{24}$$

zu approximieren.

Abschließend sei darauf verwiesen, daß in der umfangreichen Arbeit [2] zahlreiche verwandte Resultate aufscheinen.

LITERATUR

[1] APOSTOL T., Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory, Springer, New York 1976.

[2] BERNDT B.C., Analytic Eisenstein Series, Theta-Functions and Series Relations in the Spirit of Ramanujan, J.Reine Angew. Math.303/304 (1978), 332-365.

[3] KIRSCHENHOFER P. und H.PRODINGER, Asymptotische Untersuchungen über charakteristische Parameter von Suchbäumen, in diesem Band.

Peter Kirschenhofer
Helmut Prodinger
Inst.f.Algebra u.Diskrete Mathematik
der Technischen Universität Wien
Wiedner Hauptstr.8-10
A-1040 WIEN

Johannes Schoißengeier
Institut für Mathematik
der Universität Wien
Strudlhofg.4
A-1090 WIEN